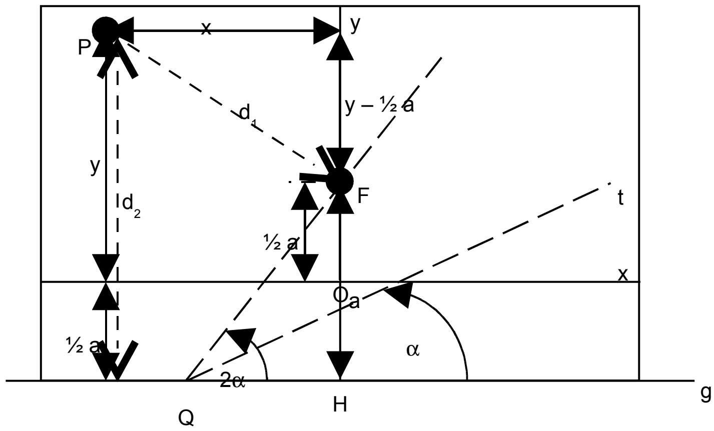
Die Bezeichnungen der Punkte, Längen und Winkel entnehme man der Skizze.



Man benötigt für die Lösung des Problems die Ortslinieneigenschaft der Parabel:
Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die zu einem gegebenen Punkt F und zu einer gegebenen Geraden g den gleichen Abstand besitzen.
Der Punkt F heißt Brennpunkt, die Gerade g heißt Leitlinie. Der Mittelpunkt des Abstandes von F zu g wird als Scheitel S bezeichnet.

Beim gegebenen Problem ist demnach die untere Kante des Blattes die Leitlinie g und der Ursprung des durch das Falten entstandenen Koordinatensystems ist der Scheitel der Parabel.
Wird der Abstand von F zu g mit a bezeichnet (wobei für a gemäß Problemstellung ein beliebiger Wert zwischen 0 cm und ca. 21 cm gewählt werden kann), so hat der Brennpunkt im gegebenen Koordinatensystem die Koordinaten $F\left(0\middle|\frac{a}{2}\right)$,
die Gerade g (Leitlinie) verläuft parallel zur x-Achse und hat damit die Gleichung $y = -\frac{a}{2}$.

1. Parabelgleichung
Es sei nun P(x|y) ein Punkt der Parabel. Dann gilt:

$d_1 = \overline{PF} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2}$ (Pythagoras) und $d_2 = d(P, g) = y + \frac{a}{2}$.

Gemäß der Ortslinieneigenschaft der Parabel gilt nun:

$$d_1 = d_2$$
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} = y + \frac{a}{2}$$

Da beide Seiten der Gleichung Abstände und damit nicht negativ sind, ist hier Quadrieren eine Äquivalenzumformung und liefert:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = y^2 + ay + \frac{a^2}{4}$$
$$x^2 = 2ay$$
$$y = \frac{x^2}{2a}$$

Da $a > 0$ gemäß Problemstellung durfte durch $2a \neq 0$ dividiert werden.
Die Gesuchte Parabel hat also die Gleichung $f(x) = y = \frac{1}{2a}x^2$.

2. Tangenteneigenschaft von t

Der Falz/Die Gerade t schneidet die Leitlinie g im Punkt $Q\left(q \middle| -\frac{a}{2}\right)$ ($Q \in g$!). Der Steigungswinkel von t wird mit α bezeichnet; der Steigungswinkel der Geraden (QF) ist aus Symmetriegründen genau doppelt so groß, er beträgt also 2α. Zwischen dem Steigungswinkel φ einer beliebigen Geraden und der Steigung m dieser Geraden gilt außerdem der bekannte Zusammenhang $m = \tan\varphi$.

<u>(i) Steigung von t aus den geometrischen Eigenschaften des Falzes</u>

Steigung der Geraden (QF) : $m_{QF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{0 - q} = -\frac{a}{q}$

Mit der Beziehung zwischen Steigung und Steigungswinkel gilt also: $\tan(2\alpha) = -\frac{a}{q}$.

Wendet man darauf die aus den Additionstheoremen folgende Umformung für den Term $\tan(2\alpha)$ an, so erhält man: $\frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = -\frac{a}{q}$.

Da der Steigungswinkel von t nun α ist, gilt für die Steigung von t : $m_t = \tan\alpha$.
Setzt man diesen Zusammenhang in die oben hergeleitete Beziehung ein, so erhält man für m_t die Bedingung: $\frac{2 \cdot m_t}{1 - m_t^2} = -\frac{a}{q}$

Hieraus errechnet sich m_t :

$$2qm_t = -a + am_t^2$$

$$am_t^2 - 2qm_t - a = 0$$

$$m_{t_{1,2}} = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{2q \pm \sqrt{4(q^2 + a^2)}}{2a} = \frac{2q \pm 2\sqrt{(q^2 + a^2)}}{2a}$$

$$m_{t_{1,2}} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + a^2}}{a}$$

Da der Falz t in der gegebenen Problemstellung eine positive Steigung besitzt und da $\sqrt{q^2 + a^2} > \sqrt{q^2} = |q|$, ist die gesuchte Steigung des Falzes/der Geraden t :

$$m_t = \frac{q + \sqrt{q^2 + a^2}}{a}$$

Dies gilt für die Steigung von t , unabhängig davon, ob t tatsächlich Tangente an die Parabel ist oder nicht. Die Gerade t geht also durch den Punkt Q und hat die errechnete Steigung m_t .

<u>(ii) t als Tangente</u>

Es soll nun die Tangente vom Punkt Q aus an die Parabel mit der unter 1. bestimmten Gleichung gelegt werden; dazu bestimmt man zunächst die Ableitung der Funktion zu $f'(x) = \frac{1}{a} \cdot x$. Der Berührpunkt der Tangente ist zunächst noch nicht bekannt, er habe die Koordinaten $B(u|f(u))$, also $B\left(u \middle| \frac{1}{2a} \cdot u^2\right)$. Bei einer Faltung wie im Problem angegeben ist sofort ersichtlich, dass der Punkt B rechts von Q liegen muß, dass also $u > q$ gilt.

Die Tangentensteigung erhält man dann zu $m_t = f'(u) = \frac{1}{a} \cdot u$. Die Tangentengleichung ergibt sich durch einsetzen in die Punkt-Steigungs-Form zu

$y - \frac{1}{2a} \cdot u^2 = \frac{1}{a} \cdot u \cdot (x - u)$.

Da die Tangente durch den Punkt $Q\left(q \middle| -\frac{a}{2}\right)$ verlaufen soll, führt man die Punktprobe für Q durch und erhält: $-\frac{a}{2} - \frac{1}{2a} \cdot u^2 = \frac{1}{a} \cdot u \cdot (q - u)$.

Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$-\frac{a}{2} - \frac{1}{2a} \cdot u^2 = \frac{1}{a} \cdot u \cdot q - \frac{1}{a} \cdot u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a} \cdot u^2 - \frac{1}{a} \cdot qu - \frac{a}{2} = 0$

und schließlich durch Multiplikation mit $2a$:

$u^2 - 2qu - a^2 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4a^2}}{2} = \frac{2q \pm \sqrt{4(q^2 + a^2)}}{2} = \frac{2q \pm 2\sqrt{q^2 + a^2}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 + a^2}$$

Da $u > q$ sein muß, ist also

$$u = q + \sqrt{q^2 + a^2}$$ die gesuchte Berührstelle.

Die Tangentensteigung erhält man damit sofort zu

$m_t = f'\left(q + \sqrt{q^2 + a^2}\right) = \frac{1}{a} \cdot \left(q + \sqrt{q^2 + a^2}\right)$, also

$$m_t = \frac{q + \sqrt{q^2 + a^2}}{a}$$

Dies gilt für die Steigung einer Tangente an die Parabel, die durch den Punkt Q verläuft, unabhängig davon, ob diese Tangente mit dem Falz übereinstimmt.

Tangente und Falz besitzen also die gleiche Steigung. Da sowohl der Falz, als auch die Tangente durch den Punkt Q verlaufen, stimmen Tangente und Falz genau dann überein, wenn sie auch – wie nachgewiesen - die gleiche Steigung haben. Daraus ergibt sich sofort, dass der Falz tatsächlich eine Tangente an die Parabel ist q.e.d.